



الإسم :

رقم الكود:

رقم المجموعة :

أجب عن الأسئلة التالية:

(١) [٩ درجات] إذا كانت $g(x) = \sin x$, $f(x) = |x|$

(أ) أوجد الدالة التركيبية fog مع تحديد نطاقها ومداها.

(ب) هل الدالة g أحادية علي نطاقها الطبيعي؟ علل؟

(ج) هل الدالة fog محدودة؟ أوجد $\max(fog)$, $\min(fog)$ (إن وجدت)؟

الحل : من التعريف نجد أن

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = |\sin x|$$

(درجة)

لحساب نطاقها :

$$D_f = \mathbb{R} , R_f = [-1, 1] , D_g = \mathbb{R} , R_g = [0, \infty[$$

(أ) واضح أن

$$D_{fog} = D_f = \mathbb{R} \text{ , إذن } R_f = [-1, 1] \subseteq D_g = \mathbb{R}$$

(درجتان)

$$R_{fog} = [0, 1] \text{ , وينتج أن } 0 \leq |fog(x)| \leq |\sin x| \leq 1$$

(درجتان)

(ب) الدالة g ليست واحد لواحد لأنه على سبيل المثال $0, \pi \in D_g$, $0 \neq \pi$ ولكن

(درجتان)

$$g(0) = \sin 0 = 0 = g(\pi) = \sin \pi = 0$$

(ج) الدالة fog دالة محدودة لأن مداها هو $[0, 1]$ وهو محدود من أعلى بـ ١ ومن أسفل بـ ٠ ويتضح أيضاً أن

(درجتان)

$$\max(fog) = 1, \min(fog) = 0$$

(٢) [٩ درجات] إستخدم تعريف النهاية ($\varepsilon - \delta$ definition) لإثبات أن $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+7}{2x-1} = 3$ ، ثم أوجد إحدي قيم δ التي تناظر $\varepsilon = 0.1$.

الحل : يجب إثبات أن

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \neq \frac{1}{2}) \left[0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x+7}{2x-1} - 3 \right| < \varepsilon \right]$$

الآن

$$\forall x \neq \frac{1}{2}:$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{x+7}{2x-1} - 3 \right| &= \left| \frac{x+7-6x+3}{2x-1} \right| \\ &= \left| \frac{5x-10}{2x-1} \right| \\ &= 5 \left| \frac{x-2}{2x-1} \right| \end{aligned}$$

وبفرض أن $\delta \leq 1$ نجد أن $1 \leq 2x-1 \leq 5 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 6 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$ ، وينتج أن $1 \leq |2x-1| \leq 5$.

(درجة)

إذن $\left| \frac{x+7}{2x-1} - 3 \right| \leq \frac{5}{1} |x-2|$ ، ولكي يكون هذا المقدار أقل من ε يجب أن يكون $|x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$ وبالتالي

يمكن اختيار $\delta \leq \frac{\varepsilon}{5}$ وبالتالي لكل $0 < \varepsilon$ يمكن اختيار $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{5})$ ليتحقق المطلوب .

(درجتان)

وللقيمة $\varepsilon = 0.1$ نجد أن $\delta = \min(1, \frac{1}{50}) = \frac{1}{50}$.

(درجتان)

(٣) [13 درجة] احسب النهاية $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1}$ ، ومن ثم ادرس اتصال الدالة التالية علي الفترة $[0, 2]$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \cos(\pi x) & , 0 \leq x \leq 1 \\ 2x + \frac{\sin(\pi x)}{\pi(x - 1)} & , 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

الحل : بوضع $y = x - 1$ نجد أن $(x \rightarrow 1) \Leftrightarrow (y \rightarrow 0)$ ، وبالتالي

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi y + \pi)}{y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin \pi y}{y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} (-\pi) \frac{\sin \pi y}{\pi y} = -\pi$$

لناقشة الاتصال على الفترة $[0, 2]$:

على الفترة $]0, 1[$: الدالة $f(x) = x^2 + \cos \pi x$ وحيث أن $\cos \pi x$ تمثل تحصيل دالتين متصلتين فهي دالة متصلة وكذلك x^2 دالة متصلة (كثيرة حدود) ، إذن المجموع $x^2 + \cos \pi x$ دالة متصلة.

على الفترة $]1, 2[$: الدالة $f(x) = 2x + \frac{\sin \pi x}{\pi(x - 1)}$ وحيث أن $\sin \pi x$ تمثل تحصيل دالتين متصلتين فهي دالة متصلة ،

والدالة $\frac{\sin \pi x}{\pi(x - 1)}$ قسمة دالتين متصلتين والمقام لا يعدم ، وبالتالي $2x + \frac{\sin \pi x}{\pi(x - 1)}$ دالة متصلة .

(درجتان)

عند النقطة $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + \cos \pi x) = 1 + \cos \pi = 1 + (-1) = 0$$

(درجتان)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x + \frac{\sin \pi x}{\pi(x - 1)} = 2 - 1 = 1$$

إذن الدالة ليست متصلة عند النقطة $x = 1$.

عند النقطة $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + \cos \pi x = 0 + \cos 0 = 1 = f(0)$$

(درجة)

إذن الدالة f متصلة من اليمين عند النقطة $x = 0$.

وبالمثل عند النقطة $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x + \frac{\sin \pi x}{\pi(x - 1)} = 4 + 0 = 4 = f(2)$$

(درجة)

إذن الدالة متصلة من اليسار عند النقطة $x = 2$.

(٤) [٩ درجات] أثبت أنه يوجد جذر حقيقي موجب للمعادلة $x^3 - x - 1 = 0$ ، ثم أوجد قيمة تقريبية لهذا الجذر بنسبة خطأ لا تتعدى 0.05 .

الحل : نفرض الدالة $f(x) = x^3 - x - 1$ وهي كثيرة حدود، وبالتالي متصلة علي $\mathbb{R}$.
 نبحث عن عددين حقيقيين a, b بحيث أن $f(a)f(b) < 0$ ، ويمكن ملاحظة أن :
 $f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$
 $f(2) = 8 - 2 - 1 = 5 > 0$

إذن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[1, 2]$ ونلاحظ أن قيمتها عند النقطة $x = 1$ سالبة وعند النقطة $x = 2$ موجبة ويكون $f(1)f(2) < 0$. إذن من نظرية القيمة الوسطي يوجد نقطة $x_o \in]1, 2[$ بحيث أن $f(x_o) = 0$.
 (درجتان)

نقسم الفترة $[1, 2]$ إلى عشرة أقسام بالنقط

$$1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9$$

ونحسب قيمة الدالة عند منتصف الفترة ، أي عند النقطة $x = 1.5$:
 (درجتان)

$$f(1.5) = (1.5)^3 - (1.5) - 1 = 3.375 - 2.3 > 0$$

أي أن الجذر يقع علي يسار النقطة $x = 1.5$ ونحسب بالتالي

$$f(1.4) = (1.4)^3 - (1.4) - 1 = 2.744 - 2.4 > 0$$

$$f(1.3) = (1.3)^3 - (1.3) - 1 = 2.197 - 2.3 > 0$$

إذن $x_o \in]1.3, 1.4[$ ويمكن أخذ تقريب له :

$$x_o \simeq \frac{1.3 + 1.4}{2} = 1.35$$

وتكون هنا نسبة الخطأ لا تتعدى 0.05 لأنه عندما تكون $x_o \in]1.3, 1.4[$ فإن $|x_o - 1.35| < 0.05$.